座標軸に平行でない直線の周りの回転体の体積

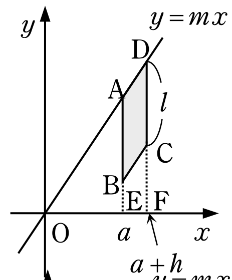
例　直線 $y=x$ と放物線 $y=x^2-2x$ で囲まれる部分を直線 $y=x$ のまわりに回転してできる回転体の体積 V について，次の手順で求めてみよう。

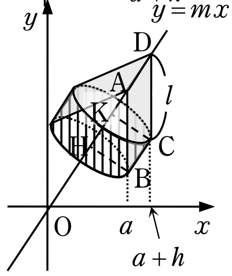
(1)　$a,\ h,\ l,\ m$ を正の数とする。

このとき，4 点 $\mathrm{A}(a,\ ma)$，$\mathrm{B}(a,\ ma-l)$，$\mathrm{C}(a+h,\ m(a+h)-l)$，$\mathrm{D}(a+h,\ m(a+h))$ を頂点とする平行四辺形 ABCD を，直線 $y=mx$ の周りに回転してできる回転体の体積が $\dfrac{\pi hl^2}{\sqrt{m^2+1}}$ で表されることを示しなさい。

(2)　(1)の結果から，回転体の体積 V を定積分で表し，V を求めなさい。

〔解答〕





(1)　右図のような 4 点 $\mathrm{A}(a,\ ma)$，$\mathrm{B}(a,\ ma-l)$，$\mathrm{C}(a+h,\ m(a+h)-l)$，$\mathrm{D}(a+h,\ m(a+h))$ を頂点とする平行四辺形 ABCD を，直線 $g:y=mx$ の周りに回転してできる回転体の体積を V_0 とする。

点 B，C から直線 g に垂線 BH，CK を引く。台形 BCDH を直線 g の周りに回転してできる回転体は，長方形 BCKH を回転してできる円盤 P と三角形 CDK を回転してできる円錐 Q からなる。三角形 BAH を直線 g の周りに回転してできる円錐 R の体積は，円錐 Q の体積に等しい。

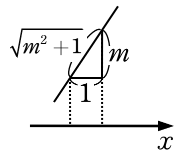
よって，平行四辺形 ABCD を直線 g の周りに回転してできる回転体の体積 V_0 は，円盤 P の体積に等しい。

（このことは，カバリエリの原理からも説明できる）

B，C から x 軸に垂線 BE，CF を引くと

$\mathrm{CD}:\mathrm{CK}=\sqrt{m^2+1}:1$，$\mathrm{BC}:\mathrm{EF}=\sqrt{m^2+1}:1$　より，

$\mathrm{CK}=\dfrac{l}{\sqrt{m^2+1}}$，$\mathrm{BC}=h\sqrt{m^2+1}$　である。



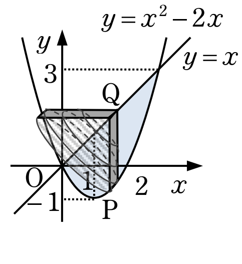
$$\therefore\quad V_0=\pi\mathrm{CK}^2\times\mathrm{BC}=\pi\left(\frac{l}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2\times h\sqrt{m^2+1}=\frac{\pi hl^2}{\sqrt{m^2+1}}$$

(2)　直線 $y=x$ と放物線 $y=x^2-2x$ で囲まれた部分は $0\leqq x\leqq 3$ の範囲である。

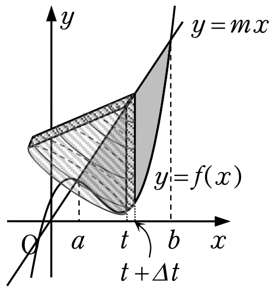
h を x の増分Δx と考え，$m=1$，$l=x-(x^2-2x)$ として適用すればよいから，

求める立体の体積 V は，

$$\begin{aligned}V&=\int_0^3\frac{\pi}{\sqrt{2}}\{x-(x^2-2x)\}^2dx\\&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^3(3x-x^2)^2dx\\&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^3(x^4-6x^3+9x^2)dx\\&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\Big[\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{2}x^4+3x^3\Big]_0^3=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{10}\cdot 3^4=\frac{81\sqrt{2}}{20}\pi\end{aligned}$$



　一般の場合について考えてみよう。
右図のような曲線 $y=f(x)$ と直線 g で囲まれた図形 U を直線 g の周りに回転してできる立体 V を求めよう。



　図形 U の $t \leqq x \leqq t+\Delta t$ の部分を直線 g の周りに回転してできる立体の体積$\Delta V=V(t+\Delta t)-V(t)$ は，上の事柄から，

$$\Delta V=\frac{\pi}{\sqrt{m^2+1}}\left\{mt-f(t)\right\}^2\Delta t$$

と表される。

　この結果から，回転体の体積 V は

$$V=\frac{\pi}{\sqrt{m^2+1}}\int_a^b\left\{mt-f(t)\right\}^2dt$$

と表される。